

均匀电宇宙中的爱因斯坦场方程解

苏成悦

(广东工业大学 数理系, 广东 广州, 510643)

摘要: 运用 Harrison 型的变换技术, 得到了爱因斯坦场方程的 3 个新解. 分别描述均匀电宇宙中的 Minkowski 时空度规、schwarzschild 型和 Reissner- Nordstrom 型黑洞的外部度规, 在度规中存在一任意参量 E_0 , 这是一个均匀电场.

关键词: 生成技术; 电宇宙; 度规

中图分类号: O412.1

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2000)03-0087-04

爱因斯坦场方程是一组非线性的偏微分方程, 要求解有物理意义的解存在极大的困难, 为此人们发展了许多严格解的方法, 生成技术即是其中一种^[1~3], 我们可以通过一个“种子”解, 经过变换获得新的解. Ernst 在讨论辐射对称稳态度规下的 E- M 场方程之后, 建立了 Ernst 生成技术^[1,2]. Kinnersley 发展了这一技术^[3], 找到了 Ernst 方程的内部对称性, 其结构为 $SU(2, 1)$ 群. 本文采用的变换实质上是 Kinnersley 群中的一种^[3,4]. 运用这类变换, 人们已得到了几类在磁宇宙中的天体的度规场和电磁场严格表达式^[5~7].

本文采用这一求解技术, 得到了在电宇宙中的 Minkowski 时空、schwarzschild 型和 Reissner-Nordstrom 型黑洞的外部度规场, 这二个新度规场在天体物理中可能存在潜在的应用. 本文分为五部分, 第二部分给出电场对闵氏时空影响, 此即 Melven 的电类宇宙^[5,8]. 第三、四部分分别求解电宇宙中的二类黑洞的外部度规. 最后部分对得到的结果进行了讨论.

1 电宇宙中的 Minkowski 时空

在 Minkowski 时空中, 取柱坐标形式, 其度规为

$$ds^2 = (dz^2 + d\rho^2 - dt^2) + \rho^2 d\phi^2, \quad (1)$$

将其表达成 papapetrou 度规形式

$$ds^2 = f^{-1}(-2P^{-2}d\xi d\xi^* + \rho^2 dt^2) - f(d\phi - \omega dt)^2, \quad (2)$$

其中 $f < 0$, $d\xi^*$ 是 $d\xi$ 的复共扼. 比较式(1)和式(2)得到 papapetrou 度规系数:

$$\begin{cases} f = -\rho, P = \rho^{-1}, \\ d\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(dz + id\rho), \\ \omega = 0. \end{cases} \quad (3)$$

引入 Ernst 的复引力势 ε 和复电磁势 Φ , 其定义为^[2]

$$\varepsilon = f - |\Phi|^2 + i\phi, \quad (4)$$

收稿日期: 1999-12-01

作者简介: 苏成悦(1961-), 男, 讲师; 主要研究方向: 天体物理

$$\Phi = A_3 + iA_0, \quad (5)$$

其中虚数单位 $i = \sqrt{-1}$, A_3 为磁标势, A_0 为电磁势的零分量, ϕ 为扭势. 因无电磁场, 容易求得在 Minkowski 时空中, 该情况下的复电磁势和复引力势

$$\Phi = 0, \quad \varepsilon = -\rho^2. \quad (6)$$

新的复引力势和复电磁势 (ε', Φ') 为^[4, 8]

$$\begin{pmatrix} \varepsilon' \\ \Phi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & 0 \\ \frac{iE_0}{2h} & \frac{1}{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad (7)$$

其中 E_0 为实参数, 表达均匀电场. 根据 h 的定义^[8] 并运用式(6), 得

$$h = 1 + \frac{1}{4}E_0^2\rho^2. \quad (8)$$

新复引力势有类似式(4)的形式, 则由此求得

$$\begin{cases} f' = \text{Re} \varepsilon' + |\Phi'|^2 = |h|^{-2}f, \\ \omega' = 0, \end{cases} \quad (9)$$

所以新的度规严格表达式可写作为

$$ds^2 = \left[1 + \frac{1}{4}E_0^2\rho^2 \right]^2 (dz^2 + d\rho^2 - dt^2) + \left[1 + \frac{1}{4}E_0^2\rho^2 \right]^{-2} \rho^2 d\phi^2. \quad (10)$$

这是与 Melvin 的磁宇宙类似的电宇宙^[5, 8].

2 电宇宙中的 schwarzschild 黑洞的外部度规

已知一个质量为 m 的球状黑洞的外部度规为

$$ds^2 = \left[\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 d\theta^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 \right] + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (11)$$

比较式(11)和式(2), 得到其 papapetrou 度规形式的各系数:

$$\begin{cases} f = -r^2 \sin^2 \theta, & P = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}, \\ d\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{dr}{\sqrt{r^2 - 2mr}} + i d\theta \right], \\ \rho = \sqrt{r^2 - 2mr} \sin \theta, & \omega = 0. \end{cases} \quad (12)$$

容易求得该情况下的复电磁势和复引力势为

$$\Phi = 0, \quad \varepsilon = -r^2 \sin^2 \theta. \quad (13)$$

运用变换式(7), 其中 h 为

$$h = 1 + \frac{1}{4}E_0^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (14)$$

得到新解的复引力势和复电磁势

$$\varepsilon' = \frac{-r^2 \sin^2 \theta}{1 + \frac{1}{4}E_0^2 r^2 \sin^2 \theta}, \quad \Phi' = \frac{-\frac{1}{2}iE_0 r^2 \sin^2 \theta}{1 + \frac{1}{4}E_0^2 r^2 \sin^2 \theta}. \quad (15)$$

度规可表达成

$$ds^2 = \left[1 + \frac{1}{4} E_0^2 r^2 \sin^2 \theta \right]^2 \left[\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 d\theta^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 \right] + \left[1 + \frac{1}{4} E_0^2 r^2 \sin^2 \theta \right]^{-2} r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (16)$$

3 在电宇宙中的 Reissner–Nordstrom 黑洞的外部度规

将该方法应用到 R–N 的情况, R–N 度规的形式为

$$ds^2 = \left[\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}} + r^2 d\theta^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2} \right) dt^2 \right] + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (17)$$

papapetrou 度规形式的系数为

$$\begin{cases} f = -r^2 \sin^2 \theta, & P = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \\ d\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{dr}{\sqrt{r^2 - 2mr + e^2}} + i d\theta \right], \\ \rho = \sqrt{r^2 - 2mr + e^2} \sin \theta, & \omega = 0. \end{cases} \quad (18)$$

其复电磁势和复引力势为

$$\Phi = -ie \cos \theta, \quad \Xi = -r^2 \sin^2 \theta - e^2 \cos^2 \theta. \quad (19)$$

根据变换式(7)可求得

$$\begin{cases} \xi' = - \frac{r^2 \sin^2 \theta + e^2 \cos^2 \theta}{1 + E_0 e \cos \theta + \frac{1}{4} E_0^2 (r^2 \sin^2 \theta + e^2 \cos^2 \theta)}, \\ \phi' = -i \frac{e \cos \theta + \frac{1}{2} E_0 (r^2 \sin^2 \theta + e^2 \cos^2 \theta)}{1 + E_0 e \cos \theta + \frac{1}{4} E_0^2 (r^2 \sin^2 \theta + e^2 \cos^2 \theta)}. \end{cases} \quad (20)$$

电宇宙中的 Reissner–Nordstrom 黑洞的外部度规为

$$ds^2 = \left[1 + E_0 e \cos \theta + \frac{1}{4} E_0^2 (r^2 \sin^2 \theta + e^2 \cos^2 \theta) \right]^2 \times \left[\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}} + r^2 d\theta^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2} \right) dt^2 \right] + \left[1 + E_0 e \cos \theta + \frac{1}{4} E_0^2 (r^2 \sin^2 \theta + e^2 \cos^2 \theta) \right]^{-2} r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (21)$$

4 讨论

我们得到了爱因斯坦 E–M 场方程的二个新的严格解. 从方程(16)和(21)可知这二个新解是非渐近平直解, 在均匀电宇宙情况下这是一个必然的结果. 当 $E_0 \rightarrow 0$ 时, 度规自然退化为通常的 Minkowski 平直时空和 schwarzschild、R–N 黑洞的时空度规; 当 $M \rightarrow 0$, $e \rightarrow 0$ 时, 度规退化为式(10), 这是类似于 Melvin's 磁宇宙的电宇宙^[5,8]. 在电宇宙中的 schwarzschild 黑洞的外部度规与

磁宇宙的情况类似. 而在电宇宙中的 R- N 黑洞的外部度规与磁宇宙的情况不同^[5], 仍是静态的.

参考文献:

- [1] Ernst F J. New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem II [J] . Phys Rev, 1968, 168: 1415- 1417.
- [2] Ernst F J. New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem [J] . Phys Rev, 1968, 167: 1175- 1178.
- [3] Kinnersley W. Generation of Stationary Einstein- Maxwell Fields [J] . J Math Phys, 1973, 14: 651- 653.
- [4] Hauser I, Ernst F J. On the Generation of New Solutions of the Einstein- Maxwell Field Equations From Electrovac Space-times with Isometries [J] . J Math Phys, 1978, 19: 1316- 1323.
- [5] Ernst F J. Black Hole in a Magnetic Universe [J] . J Math Phys, 1976, 17: 54- 56.
- [6] Ernst F J, Wild W J. Kerr Black Hole in a Magnetic Universe [J] . J Math Phys, 1976, 17: 182- 184.
- [7] 王永久. 磁场中的旋转双荷黑洞 [J] . 物理学报, 1984, 33: 1728- 1732.
- [8] Ernst F J. Removal of the Nodal Singularity of the C- metric [J] . J Math Phys, 1976, 17: 515- 516.

The Three New Solutions in Einstein- Maxwell Equation

SU Cheng-yue

(Dept. of Mathematics & Physics, GDUT Guangzhou 510643, China)

Abstract: By using Harrison inversion, three new solutions of Einstein- Maxwell equation have been obtained, which respectively describes the exterior metric field associated with the space-times of Minkowski, schwarzschild and Reissner- Nordstrom black holes in an electric universe. E_0 is an arbitrary constant, expressing a uniform electric field, in the metric.

Key words: generation techniques; black hole; an electric universe

(上接第 86 页)

The Slowing Down in the Bistability Chemical Reaction

ZHAN Ye-hong, WU Fu-gen

(Dept. Of Applied Physics, GDUT, Guangzhou 510090, China)

Abstract: Studying two kinds of the slowing down in the bistability chemical reaction system, the one is the critical slowing down at the edges of bistable region and its bifurcation; the other is the slowing down, which is far from the critical point. The results possess universal properties.

Key words: bistability; slowing down; nonlinear kinetics; critical phenomena